

ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Calle San Martín N.º 352 - Casilla 487 - Teléf. 88841 - Santiago - Chile

COMISIÓN DE REDACCIÓN:

Don Raúl Simón (Presidente de la Comisión),
Don Enrique Palma R., Don Marcos Orrego P.,
Don Carlos Krumm, Don Walter Möller y
Don Luis Ruiz Fernández.

Año XXXI § Enero de 1931 § Núm. 1

Camilo Gutiérrez

Cálculo de sistemas hiperestáticos con el teorema de los trabajos virtuales

Traducción de Yago Rovano A.

(Continuación)

§ 2. DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS EN UNA ESTRUCTURA ENREJADA

9. Recordando que el teorema de los trabajos virtuales es válido para un sistema cualquiera de fuerzas externas en equilibrio aplicadas a la estructura, entre las cuales deben incluirse también las fuerzas X estáticamente indeterminadas, y para un sistema cualquiera de desplazamientos, siempre que sean pequesísimos y geoméricamente posibles, puede formularse la regla siguiente:

«Para calcular el desplazamiento δ de un nudo cualquiera de una estructura enrejada, en una dirección dada, contenida en el plano de la estructura, se suprimen todas las cargas reales aplicadas a la estructura, y todas las barras o ligazones superabundantes (transformando la estructura dada en una estructura principal cualesquiera, distinta de la obtenida para la determinación de las X); se aplica al nudo en cuestión una carga 1 en la dirección de δ y se escribe la ecuación de los trabajos virtuales introduciendo para los desplazamientos Δc y Δs los efectivos, o sea producidos por la condición real de carga».

10. EJEMPLO I.—Se pide la cantidad δ_6 de que baja respecto a la horizontal de los apoyos el nudo 6 de la viga estáticamente determinada representada en la fig. 7 a, producida por una determinada condición de carga.

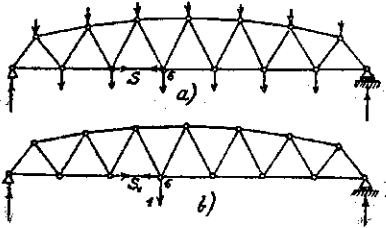


Fig. 7.

Determinemos los esfuerzos S en las barras, producidos por la condición de carga dada, y suponiendo en seguida la viga completamente descargada y sin peso, apliquemos sólo al nudo 6 una carga vertical igual a 1 (fig. 7b).

Determinemos los esfuerzos correspondientes S_1 en las barras y escribamos la ecuación de los trabajos

$$1 \cdot \delta_6 = \sum S_1 \Delta s$$

o sea

$$\delta_6 = \sum S_1 S r$$

Como el apoyo tiene un carro de dilatación, una variación uniforme de temperatura transforma la viga dada en otra semejante y por lo tanto el desplazamiento vertical del nudo 6 no es influenciado si la cabeza inferior de la viga es horizontal.

11. EJEMPLO II.—Se pide el asentamiento d respecto a la horizontal de los apoyos extremos, del vértice C de la cercha ya estudiada en el N.º 8. Después de haber determinado las incógnitas X' y X'' y haber calculado los esfuerzos en las barras con la relación

$$S = S_0 - S' X' - S'' X''$$

se anulan todas las cargas reales y se aplica a la estructura principal estáticamente determinada (fig. 8 a) sólo una carga igual a 1 aplicada en C; resultan en las barras ciertos esfuerzos S_1 fácilmente determinables.

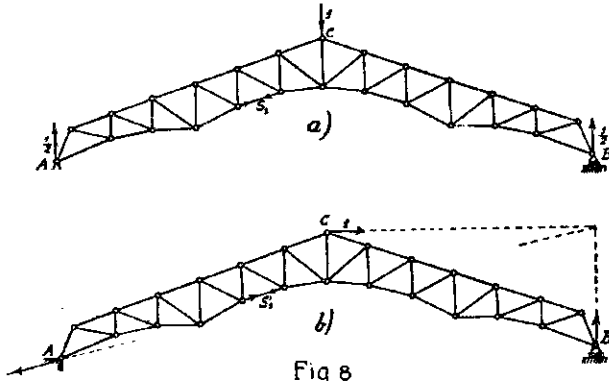


Fig. 8

Se puede entonces escribir la ecuación de los trabajos virtuales

$$1 \cdot \delta = \sum S_1 \Delta s = \sum S_1 S r$$

Si se quiere en vez del desplazamiento horizontal δ' del vértice C hacia la derecha, bastará imaginarse la estructura principal solicitada por una fuerza horizontal igual a 1 aplicada en C y dirigida

hacia la derecha (fig. 8b). Si representamos con S'_1 los esfuerzos correspondientes en las barras, la ecuación de los trabajos virtuales nos da, suponiendo rígido el apoyo A:

$$1 \cdot \delta' = \sum S'_1 \Delta s = \sum S'_1 S r$$

12. EJEMPLO III. — Se pide el descenso δ_m del nudo m del tramo central de la viga enrejada continua representada en la fig. 9.

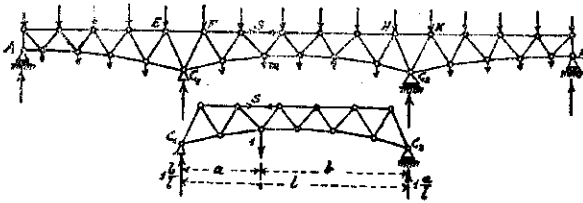


Fig. 9.

Después de haber determinado los esfuerzos S en las barras, correspondientes a la condición de carga dada, se hace estáticamente determinado el tramo, en que se encuentra el nudo m eliminando las dos barras EF, HK con lo que se obtiene la viga $c_1 C_2$ simplemente apoyada. Se imagina entonces cargada esta viga con una sola carga vertical igual a 1 aplicada en el nudo m ; se producen en las barras ciertos esfuerzos S_1 , fácilmente determinables. Después se escribe la ecuación de los trabajos virtuales:

$$1 \cdot \delta_m = \sum S_1 \Delta s = \sum S_1 S r$$

13. El polígono de inflexión de la cabeza de una viga enrejada puede construirse determinando el desplazamiento de cada nudo con la aplicación repetida del teorema de los trabajos virtuales en la forma indicada en el N.º 9, advirtiéndose que puede evitarse una nueva determinación de los esfuerzos S_1 para cada desplazamiento que se husque.

Con este objeto (1), suponiendo que se trate una viga de longitud l simplemente apoyada (si se trata de una viga continua y se busca la deformación de un tramo dado, para la determinación de los esfuerzos S_1 podemos, como es sabido, aislar ese tramo de los demás y considerarlo como simplemente apoyado), se calculan o se construyen con los diagramas recíprocos (si la viga es simétrica bastará uno solo) los esfuerzos S_A y S_B producidos por las reacciones de apoyo $A=1$, $B=1$ respectivamente; entonces, si x_m y x'_m son las distancias del nudo considerado a los apoyos A (izquierdo) y B (derecho), se tiene, evidentemente, para la expresión del desplazamiento de aquel nudo

$$\delta_m = \frac{x'_m}{l} \sum S_A S r + \frac{x_m}{l} \sum S_B S r$$

en la cual la primera sumatoria es para las barras de la izquierda y la segunda para las barras de la derecha del nudo considerado.

(1) Winkler, Vorträge über Brückenbau.

Una barra se debe considerar a la derecha o a la izquierda según que la carga 1 , que imaginamos aplicada al nudo en cuestión, pertenezca a la derecha o a la izquierda de las dos partes en que queda dividida la viga por la sección que se ha hecho para determinar el esfuerzo en aquella barra. Si hay una barra que sale del nudo considerado, para la cual no sea aplicable el criterio considerado, habrá que evaluar separadamente el término $\frac{S_1 S_2}{EF}$ correspondiente a aquella barra.

Dicho polígono de inflexión puede construirse también como polígono funicular de fuerzas ideales llamadas *pesos elásticos*, aplicadas en los nudos correspondientes de la estructura (1). Entre un peso cualquiera, desplazamientos η_{m-1} , η_m , η_{m+1} (fig. 10) de los nudos $(m-1)$ éximo, m éximo y $(m+1)$ éximo, subsiste la relación

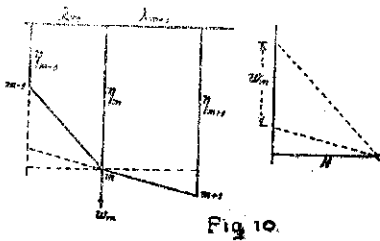


Fig. 10.

$$\omega_m = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}} \right\}$$

que se obtiene fácilmente de la consideración del polígono de las fuerzas y del polígono funicular; o también, suponiendo $H=1$

$$(16) \quad \omega_m = \frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}}$$

El segundo miembro de la (16) puede expresarse fácilmente en cada caso como el trabajo virtual correspondiente a una condición de carga hipotética y a las variaciones de longitud efectivas de las barras, con lo cual el polígono funicular de los pesos elásticos ω así calculados representará el polígono de deformación real.

14. DIAGRAMA DE WILLIOT.—Antes de dejar el tema de los desplazamientos de los nudos de una viga enrejada producidos por las fuerzas externas aplicadas a la estructura o por otra causa, séanos permitido describir brevemente la sencillísima construcción puramente geométrica debida a Williot (2), aunque ella no tenga ninguna relación con el teorema de los trabajos virtuales.

Sea ABC (fig. 11 a) un elemento triangular de la estructura, supongamos por un momento que el nudo A y la barra AB sean de posición invariable, y busquemos la nueva posición del nudo C después que las barras s_1 , s_2 , s_3 han sufrido las variaciones de longitud Δs_1 , Δs_2 , Δs_3 respectivamente, de las cuales supondremos, p. ej., positiva la primera y negativa las otras dos.

Imaginemos suprimida la unión en C de las dos barras s_2 , s_3 y apliquemos en BB' la variación de longitud Δs_1 en el sentido AB porque Δs_1 es positivo; apliquemos

(1) Müller-Breslau, I. c.

(2) Williot, Annales du Génie Civil. 1877.

después en CC_2 la variación Δs_2 en el sentido CA porque Δs_2 es negativo. La barra BC por efecto del alargamiento Δs_1 se traslada paralelamente a sí misma a $B'C_2$; apliquemos finalmente en C_2C_3 la variación Δs_3 (en el sentido C_2B' porque la hemos supuesto negativa); para cerrar nuevamente el triángulo tienen que rotar las barras AC_1 , $B'C_3$ en torno de los nudos A y B' , con lo cual sus extremos C_1 y C_3 describirán dos arcos de círculo, los cuales por otra parte pueden reemplazarse por las tangentes respectivas, a causa de la pequeñez de las deformaciones. Por lo tanto, trazando $C_1C' \perp AC$, $C_3C' \perp BC$ obtenemos en el punto de intersección C' la nueva

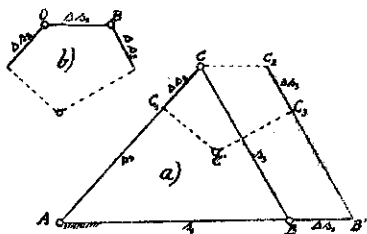


Fig. 12

posición del nudo C , de manera que CC' representa en magnitud, sentido y posición el desplazamiento del nudo C . Si llevamos a partir de un polo O (fig. 11 b), arbitrariamente elegido, segmentos equipolentes de las variaciones Δs_1 , Δs_2 y a continuación de Δs_1 , aplicamos un segmento equipolente de Δs_3 , y por los extremos libres de Δs_2 y Δs_3 trazamos normales a las direcciones de las barras s_2 y s_3 , obtenemos en el segmento que va del polo al punto de intersección de esas normales un segmento equipolente al desplazamiento del nudo C ; en la práctica es mucho más oportuno para conseguir mayor claridad, construir los desplazamientos de esta manera, aparte del esquema de la estructura.

Procediendo de la misma manera se puede determinar el desplazamiento de un cuarto nudo unido mediante dos barras a dos de los nudos ya considerados, y así en seguida se construye el diagrama de Williot, en el cual los radios que parten del polo O dan en magnitud y dirección los desplazamientos de cada nudo de la estructura. Se entiende que para esta construcción gráfica conviene que las variaciones de longitud Δs de las barras sean ampliadas fuertemente, sin que por eso la construcción pierda su rigor matemático; en efecto, la fig. 11 b construida con Δs ampliados en una razón cualquiera n es homotética (en la razón n) con la que se construiría valiéndose de las variaciones efectivas Δs de longitud de las diversas barras, por consiguiente CC' representa exactamente en posición el desplazamiento del nudo, pero ampliado en la razón n .

EJEMPLO I.—La fig. 12 a representa el esquema de una grúa enrejada articulada con rótula en O , y guiada en a por un collar cilíndrico de generatrices verticales. Suponiendo conocidos los esfuerzos S en cada barra para una condición de carga dada (en el esquema se representaron como de costumbre más gruesas las barras comprimidas y más delgadas las tendidas) y calculadas las variaciones de longitud correspondientes $\Delta s = \frac{EF}{Ss}$ de las barras, se ha construido en la fig. 12 b el diagrama de Williot en la forma indicada, partiendo del nudo fijo O y observado que la barra Oa es de dirección invariable; los desplazamientos $O'a'$, $O'b'$, $O'c'$, $O'd'$ se aplicaron en el esquema a una escala diez veces menor, y se indicó con línea de puntos el esquema de la viga deformada. Sin embargo hay que observar que mientras así se obtiene la representación exacta en posición de los desplazamientos de los nudos, con la aplicación n , no se tiene la variación de longitud de las barras; sin embargo el esquema de puntos así construido sirve para dar una idea de la deformación de la estructura.

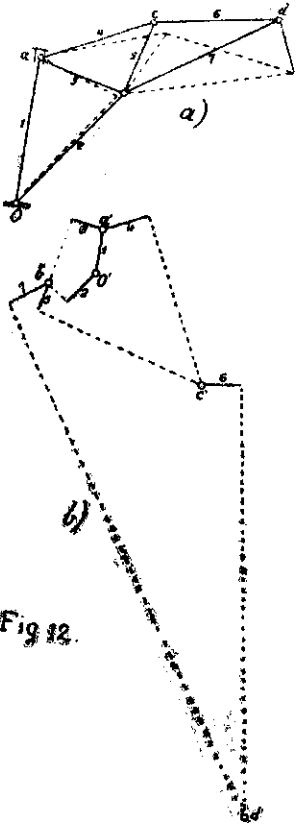


Fig 12.

15. Cuando, como sucede en la mayoría de los casos de la práctica, no exista una barra que salga del nudo fijo O que sea de dirección invariable, se comenzará a construir el diagrama del mismo modo, siguiendo el método indicado, como si una barra que sale de O , arbitrariamente elegida, fuese de dirección invariable, y después se compondrán

los desplazamientos así obtenidos con los que resulten de una rotación de toda la estructura en torno del nudo fijo, rotación cuya amplitud queda determinada en cada caso especial por las ligazones a que está sometida la estructura.

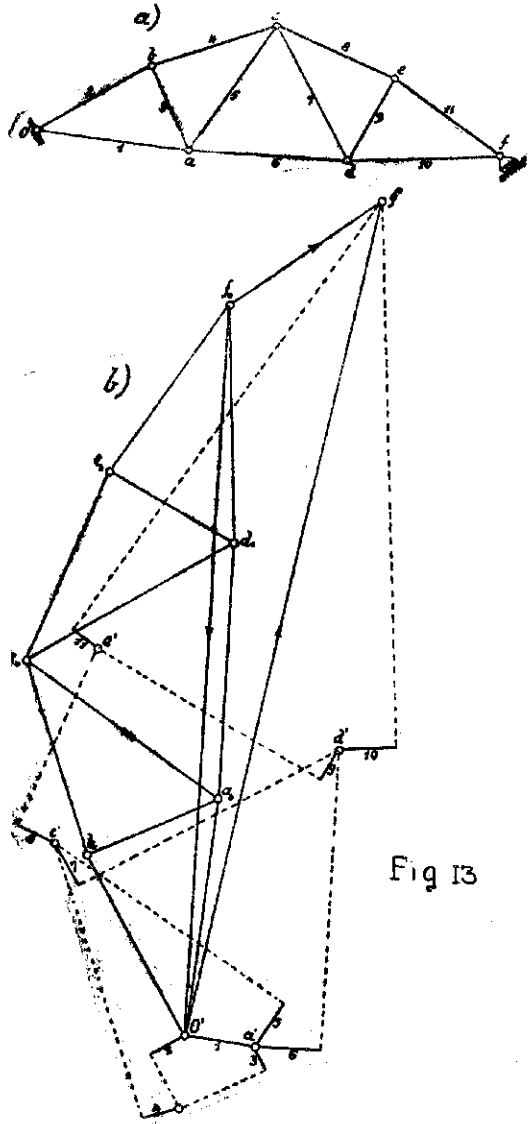


Fig 13

EjemPlo II.—La fig. 13a representa el esquema de una cercha impostada con rótula en O , apoyada con carro de dilatación en f contra una superficie plana inclinada cualquiera. Partiendo del punto fijo O y considerando primeramente la barra 1 como de posición invariable, se construye (fig. 13 b) el diagrama de Williot, con lo cual se obtienen los desplazamientos auxiliares $O'a'$, $O'b'$...

obsérvese ahora que el desplazamiento real del nudo f no puede tener lugar más que en la dirección del apoyo, y como el desplazamiento $O'f'$ no tiene esa dirección, habrá que hacer rotar la estructura reformada, en torno del nudo O a fin de que el nudo f caiga en su plano de deslizamiento. A consecuencia de esta rotación todos los nudos describen arcos de círculo que tienen el centro en O y que son proporcionales a las distancias que tienen al punto O , y estos arcos pueden reemplazarse, como de costumbre, por las respectivas tangentes. Por consiguiente, trazada por O' la normal $O'fo$ a la recta Of y por f' la paralela $f'fo$ al plano de apoyo, resultará en $f'of'$ el desplazamiento verdadero del nudo f , resultante del desplazamiento foO' (debido a la rotación en torno de O) y del desplazamiento precario $O'f'$ determinado anteriormente.

Ahora, para obtener todos los otros puntos ao , bo , co ,... análogos a fo obsérvese que deben encontrarse sobre los rayos de un haz de centro O' , respectivamente normales a los radios que van del nudo O de la estructura a los nudos a , b , c ,... y que los segmentos $O'ao$, $O'bo$, $O'co$,... deben estar con las distancias correspondiente. Oa , Ob , Oc ,... en la razón constante $O'fo : Of$; resulta que uniendo con rectas los puntos O' , ao , bo , co ,... debe obtenerse un esquema análogo al de la estructura dada, girado de 90° respecto a este último, y con la razón de similitud $O'fo : Of$. Este nuevo esquema resulta por lo tanto completamente determinado, y se obtienen así en aoa' , bob' , coc' ,... los segmentos equipolentos de los desplazamientos reales en la estructura.

16. Si al construir el diagrama de Williot se parte, como se ha hecho en los ejemplos precedentes, de un nudo extremo de la estructura, sucede a veces que los desplazamientos auxiliares asumen proporciones demasiado exageradas, con perjuicio de la comodidad y de la exactitud de la construcción gráfica. Se remedia tal inconveniente partiendo de un nudo intermedio, supuesto fijo, y determinando después la figura semejante al esquema, que satisfaga las condiciones de apoyo. Sirva de ilustración el ejemplo siguiente.

EjemPlo III (1).—La fig. 14 a representa el esquema de una viga enrejada triangulada en forma de pez, fija en g , móvil horizontalmente con carro de dilatación en d . Partiendo del nudo intermedio O considerado como fijo, y suponiendo invariable de posición la barra l , construyamos el diagrama Williot, primero para una mitad de la viga y en seguida para la otra. Obtenidos así los desplazamientos auxiliares $O'a'$, $O'b'$, $O'c'$, $O'd'$, $O'e'$, $O'f'$, $O'g'$, obsérvese:

1.º Que el desplazamiento efectivo del nudo g debe ser nulo y por lo tanto el punto g_0 debe coincidir con g' ;

2.º Que el desplazamiento del nudo g no puede ser más que horizontal, y por lo tanto el punto d_0 debe encontrarse sobre la horizontal trazada por d' ;

3.º Que $g_0 d_0$ debe resultar normal a gd .

Estas tres condiciones determinan completamente la figura semejante al esquema, con lo que quedan determinados los desplazamientos efectivos para todos los nudos.

Si proyectamos horizontalmente sobre las verticales de los nudos, p. ej., del contorno superior de la viga, los desplazamientos así determinados, o sea proyectamos g_0 y d_0 en g_1 y d_1 , y e' , a' , b' en e_1 , a_1 y b_1 y unimos los puntos así obtenidos por medio de rectas, se obtiene el polígono de inflexión de la cabeza superior de la viga. Este polígono tiene una importancia especial en las aplicaciones. Cuando sólo se trate de construir este polígono se puede evitar, como es evidente, la construcción del esquema semejante al de la viga dada.

§ 3.—TEOREMAS DERIVADOS DE LA ECUACIÓN DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

17. TEOREMA DE CLAPEYRON.—Designando con Q una cualquiera de las fuerzas externas aplicadas en los nudos de una viga enrejada, y con δ el desplazamiento de su punto de aplicación en la dirección de la fuerza, debido a la deformación elástica de

(1) Müller-Breslau, I, c.

la viga; con S y Δs respectivamente, los esfuerzos en las barras y las variaciones relativas de longitud que producen esos esfuerzos, la ecuación de los trabajos virtuales toma la forma

$$\Sigma Q \delta = \Sigma S \Delta s$$

y por lo tanto se tiene también

$$\frac{1}{2} \Sigma Q \delta = \frac{1}{2} \Sigma S \Delta s$$

pero $\frac{1}{2} \Sigma S \Delta s$ representa para una barra cualquiera el trabajo de deformación cuando el esfuerzo crece con una ley cualquiera gradualmente, desde el valor 0 hasta el valor final.

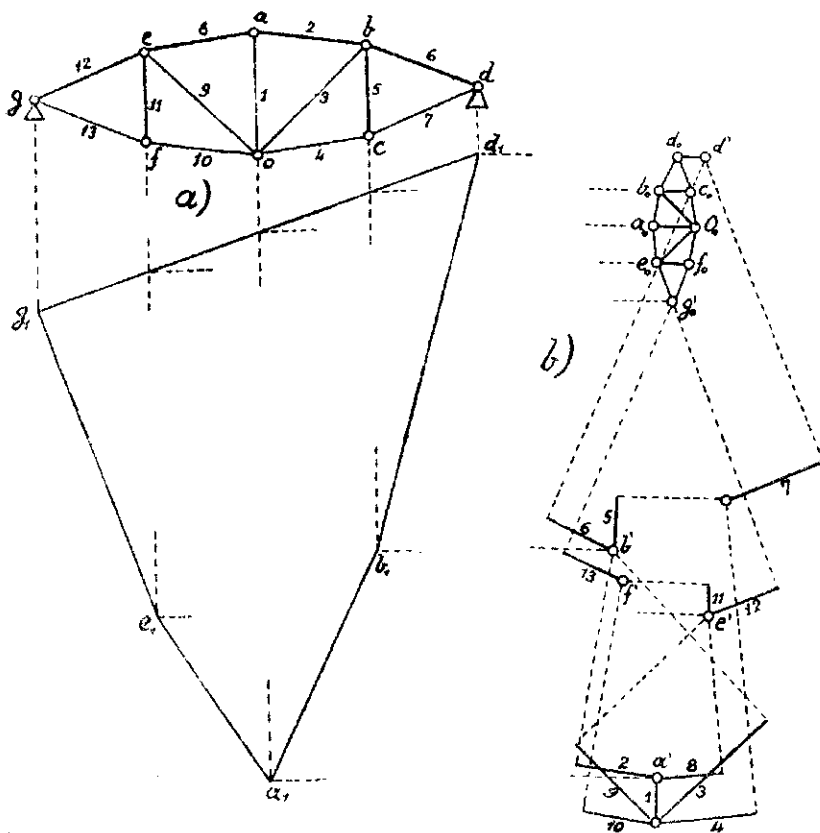


Fig. 14

El trabajo producido por las fuerzas externas para deformar la estructura es independiente de la ley según la cual crecen dichas fuerzas, y también del orden de sucesión de su acción, y es igual a la semisuma de los productos de los valores finales de las fuerzas por los desplazamientos finales de sus puntos de aplicación, evaluados en la dirección de las fuerzas mismas.

18. EXPRESIÓN GENERAL DEL TRABAJO DE DEFORMACIÓN.—Consideremos una estructura hiperestática solicitada en los nudos por fuerzas externas dadas, en equilibrio, crecientes gradualmente desde el valor cero hasta el valor final; supongamos que las reacciones de las ligazones no produzcan trabajo; y para tener el caso más general supongamos que en algunas o en todas las barras se produzcan de la misma manera fuerzas independientes de las cargas (tensiones artificiales, esfuerzos producidos por variaciones de temperatura, por defectos de construcción, etc.) que indicaremos con S_t . Los esfuerzos totales S_i resultarán iguales a la suma de los S_t producidos por las fuerzas externas y de los S_t ; se tendrá entonces

$$S_i = S + S_t$$

y el trabajo total de deformación para toda la estructura será:

$$L_i = \frac{1}{2} \sum S_i \Delta s = \frac{1}{2} \sum S_i^2 r$$

o sea

$$L_i = \frac{1}{2} \sum S^2 r + \sum S S_t r + \frac{1}{2} \sum S_t^2 r$$

pero en virtud del teorema de los trabajos virtuales, $\sum S S_t r = 0$, porque siendo nulas las fuerzas externas (cuando se consideran los esfuerzos independientes de las cargas), y las reacciones de las ligazones, por hipótesis, no producen trabajo; se tiene

$$0 = \sum S_t \Delta s$$

por consiguiente

$$(17) \quad L_i = \frac{1}{2} \sum S^2 r + \frac{1}{2} \sum S_t^2 r$$

19. TEOREMA DEL TRABAJO MÍNIMO.—El trabajo $\frac{1}{2} \sum S^2 r$ es una cantidad constante para un sistema dado de fuerzas externas; los términos S_t son en vez variables independientes de las cargas, pero como todos los términos de la segunda sumatoria de la (17) son esencialmente positivos, en la hipótesis hecha es válido el teorema:

El trabajo de deformación de una estructura enrejada solicitada en los nudos por fuerzas externas en equilibrio toma el valor mínimo

$$L = \frac{1}{2} \sum S^2 r$$

cuando las barras de la estructura no están sujetas a esfuerzos independientes de las cargas.

Las ecuaciones que determinan las fuerzas hiperestáticas X , cuando las reacciones de apoyo no producen trabajo, se convierten como se ha visto en el N.º 4 en las (9), las cuales si se prescinde de los esfuerzos que pueden producirse en las barras por causas independientes de las cargas (variaciones de temperatura, defectos de construcción, etc.) coinciden con las

$$\frac{\partial L}{\partial X'} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial X''} = 0, \quad \dots$$

de donde resulta otra manera de determinar las X (en las condiciones arriba indicadas) en armonía con el teorema demostrado ahora:

Se expresa el trabajo de deformación L de la estructura en función de las fuerzas externas y de las X y se igualan a cero las derivadas parciales primeras respecto a las X.

El teorema del trabajo mínimo fué enunciado por primera vez por el general Menabrea, que lo llamó también *principio de elasticidad* y lo expresó en los términos siguientes:

Quando un sistema elástico está en equilibrio bajo la acción de fuerzas externas, el trabajo desarrollado por efecto de las tensiones o compresiones de los miembros que unen los diversos puntos del sistema es un mínimo.

Castigliano, que con su bien conocida obra «*Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*» (Turín 1879) contribuyó eficazmente de un modo especial por las interesantes aplicaciones tratadas, a la difusión de los métodos modernos de cálculo de los sistemas elásticos, enunció el mismo teorema en la forma siguiente, que dió ocasión a diversas disputas: *Las tensiones que se desarrollan después de ocurrida la deformación tienen los valores que hacen mínimo el trabajo de deformación* (1).

20. TEOREMA DE LAS DERIVADAS DEL TRABAJO.—La ecuación de los trabajos virtuales para una viga enrejada, para la cual las reacciones de las ligazones no producen trabajo y las barras no soportan esfuerzos independientes de las cargas, pueden escribirse en la forma siguiente:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_m \delta_m \dots + P_n \delta_n = \\ \Sigma (S_1 P_1 + S_2 P_2 + \dots + S_m P_m \dots + S_n P_n + S' X' + S'' X'' + \dots) \Delta s \end{array} \right.$$

Supongamos ahora nulas todas las X y todas las cargas P a excepción de P_m que la haremos igual a 1; se obtiene entonces:

$$(19) \quad \delta_m \Sigma S_m \Delta s$$

O también, si observamos que la (18) es válida para valores cualesquiera de P y de X, si tomamos la derivada del segundo miembro respecto a P_m podemos considerar como constantes todas las otras P y todas las X, y escribir $\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_0}{\partial P_m} = S_m$ y entonces la (19) puede escribirse también

$$\delta_m = \Sigma \frac{\delta S}{\delta P_m} \Delta s$$

(1) El principio de la elasticidad fué enunciado por Menabrea a la Academia de Turín en 1857; siguió en seguida la Nota del mismo autor a la Academia de Francia en 1858, y finalmente la Memoria a la Academia de Turín en 1871. «Principe d'élasticité ou principe de moindre travail». Este principio fué empleado en algunas cuestiones por Vene, Pagani, Massotti. Ya en 1857 (Academia de Turín) Dorna aplicó el método de los momentos virtuales a la solución de los problemas de la estática de las construcciones.

Sobre la prioridad del teorema del trabajo mínimo véase «*Atti della R. Academia dei Lincei*» (1875).

Por lo demás se llega al mismo resultado extendiendo la derivada a las X , consideradas, como lo son, como funciones de las P ; en efecto, poniendo:

$$\begin{aligned} X' &= \alpha'_1 P_1 + \alpha'_2 P_2 + \dots + \alpha'_m P_m + \dots \\ X'' &= \alpha''_1 P_1 + \alpha''_2 P_2 + \dots + \alpha''_m P_m + \dots \end{aligned}$$

se tendrá

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_0}{\partial P_m} + S' \alpha'_m + S'' \alpha''_m + \dots$$

y entonces

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S_0}{\partial P_m} \Delta s + \alpha'_m \Sigma S' \Delta s + \alpha''_m \Sigma S'' \Delta s + \dots$$

pero en la hipótesis $c=0$ y $t=0$ se tiene:

$$\Sigma S' \Delta s = 0 \qquad \Sigma S'' \Delta s = 0$$

por lo tanto, etc.

Reemplazando Δs por su expresión obtenemos:

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m} \frac{S_s}{EF} = \frac{\partial \Sigma \frac{S^2_s}{2EF}}{\partial P_m}$$

o sea

$$(20) \qquad \delta_m = \frac{\partial L}{\partial P_m}$$

Luego, en la hipótesis hecha vale el teorema:

El desplazamiento δ_m del punto de aplicación m de una carga P_m en la dirección de P_m es igual a la derivada parcial del trabajo L de deformación de la viga respecto a P_m .

Al aplicar este teorema recuérdase que pudiéndose siempre considerar los esfuerzos en las barras superabundantes, como también las reacciones superabundantes, como fuerzas externas independientes aplicadas a la estructura principal, su puede limitar la expresión de L sólo a la estructura principal estáticamente determinada.

De análoga manera se demuestra el teorema recíproco, o sea: *La derivada parcial del trabajo de deformación L , respecto a δ_m , es igual a la carga P_m .*

Estos teoremas se deben a Castigliano.

21. TEOREMA DE BETTI.—Supongamos que en los nudos de un sistema enrejado, en las condiciones indicadas en los dos números precedentes, se aplique primero un

sistema de fuerzas P_a e indiquemos con S_a y Δs_a respectivamente, los esfuerzos producidos en las barras y las correspondientes variaciones de longitud de las mismas. Suprimamos las fuerzas P_a y apliquemos en seguida al mismo sistema otras fuerzas P_b , e indiquemos con S_b , Δs_b las cantidades correspondientes, análogas a las precedentes. Sean δ_b los desplazamientos de los puntos de aplicación de las P_a *avaluados en las direcciones* P_a producidos por las fuerzas P_b , y demos un significado análogo a δ_a .

Apliquemos el teorema de los trabajos virtuales, primero al sistema de fuerzas de índice a y a los desplazamientos de índice b , y después al sistema de fuerzas de índice b y a los desplazamientos de índice a , tendremos

$$\begin{aligned}\Sigma P_a \delta_b &= \Sigma S_a \Delta s_b = \Sigma S_a S_b r \\ \Sigma P_b \delta_a &= \Sigma S_b \Delta s_a = \Sigma S_b S_a r\end{aligned}$$

de las cuales se deduce:

$$(21) \quad \Sigma P_a \delta_b = \Sigma P_b \delta_a$$

o sea: *En un sistema enrejado cargado en los nudos, en el cual las reacciones de las ligaduras no producen trabajo y las barras no soportan esfuerzos independientes de las cargas, la suma de los productos de un sistema de fuerzas por los desplazamientos (avaluados en dirección de estas fuerzas) producidos por otro sistema de fuerzas, es igual a la suma de los productos de las fuerzas del segundo sistema por los desplazamientos (avaluados en dirección de estas segundas fuerzas) producidos por el primero.* Este teorema lleva también el nombre de *Teorema de reciprocidad*.

22. TEOREMA DE MAXWELL.—Supongamos que en el teorema del número precedente los dos sistemas de fuerzas se reduzcan cada uno a una sola fuerza unitaria aplicadas, la primera en un nudo m en una dirección mu , la segunda en un nudo n en una dirección nv ; sea δ_{mn} el desplazamiento del nudo m , avaluado en la dirección mu , producido por la segunda fuerza, y δ_{nm} el desplazamiento análogo del nudo n producido por la primera; la (21) se convertirá en:

$$(22) \quad \delta_{mn} = \delta_{nm}$$

que expresa el *teorema de Maxwell* (1) demostrado antes que el de Betti, o sea:

El desplazamiento de un nudo m en la dirección mu producido por una fuerza aplicada a un nudo n en la dirección nv es igual al desplazamiento del nudo n en la dirección nv producido por la misma fuerza l aplicada al nudo m en la dirección mu .

23. APLICACIÓN.—Una cimbra enrejada triangular (fig. 15), estrictamente indeformable por sí misma, tiene además sus extremos A y B unidos por un tirante con el objeto de eliminar el empuje que produciría sobre los pies derechos si estuviese impostada con rótulas en ellos. El apoyo A es fijo y el B es móvil sin rozamiento, por consiguiente, las reacciones de apoyo no producen trabajo,

(1) Maxwell J. C., *On the Calculation of the equilibrium and stiffness of frames* (Philosophical Magazine, vol. 27, 1864)

y una variación uniforme de temperatura tiene por efecto sólo el de transformar la estructura dada en otra semejante, sin producir ningún esfuerzo en las barras. Por lo tanto son aplicables los teoremas del trabajo mínimo y de las derivadas del trabajo.

Queremos demostrar con este ejemplo cómo el teorema de los trabajos virtuales y los otros teoremas mencionados proporcionan el mismo valor para la tensión X en la cadena.

CON EL TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES. Eliminada la cadena se determinan los esfuerzos S_0 en las barras de la cimbra (estructura principal); suprimidas en seguida todas las cargas y la cadena, se aplican en A y en B dos fuerzas unitarias iguales y opuestas, dirigidas hacia afuera ($X = -1$) y se determinan los esfuerzos S' correspondientes; se tiene entonces

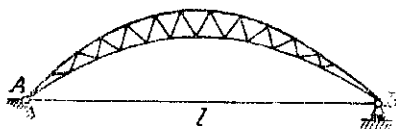


Fig. 15

$$S = S_0 - S'X$$

y para determinar X sirve la ecuación de los trabajos virtuales correspondiente a la sollicitación hipotética $X = -1$ y a los desplazamientos efectivos, o sea

$$l \Delta l = \sum S' \Delta s = \sum S' S_r = \sum S' S_0 r - X \sum S'^2 r$$

pero $\Delta l = \frac{Xl}{EF_c}$ si F_c es el área de la sección transversal de la cadena; luego:

$$X = \frac{\sum S' S_r}{\frac{l}{EF_c} + \sum S'^2 r}$$

CON EL TEOREMA DEL TRABAJO MÍNIMO.—Avaluando el trabajo de deformación de la cadena separadamente del de la cimbra se tiene

$$L = \frac{X^2 l}{2EF_c} + \frac{1}{2} \sum S'^2 r$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 = \frac{Xl}{EF_c} + \sum S_r \frac{\partial S}{\partial X} = \frac{Xl}{EF_c} - \sum S S' r$$

de la cual se obtiene la misma expresión para X .

CON EL TEOREMA DE LAS DERIVADAS DEL TRABAJO.—El desplazamiento del punto B en la dirección BA debe ser igual a la derivada del trabajo de deformación de la cimbra propiamente tal, respecto a la tensión X de la cadena, pero ese desplazamiento es negativo y queda medido por el alargamiento de la cadena, o sea por $\frac{Xl}{EF_c}$; luego

$$-\frac{Xl}{EF_c} = \frac{\partial \frac{1}{2} \sum S'^2 r}{\partial X} = \sum S_r \frac{\partial S}{\partial X} = -\sum S S' r$$

que nos da la misma expresión para X .

24. La investigación de los desplazamientos de los nudos de una estructura enrejada no sólo tiene importancia para las operaciones de prueba, sino que puede ser útil también para la determinación de las incógnitas X en las estructuras hiperestáticas. Esto resulta, en primer lugar, de la interpretación siguiente de las sumatorias que entran en las ecuaciones que determinan las X , encontradas en el § 1, p. ej. en las (15). Aplicando el teorema de los trabajos virtuales a la *estructura principal*, combinando los esfuerzos S_0 con los desplazamientos producidos por la sollicitación $X' = -1$ (designaremos con δ' los desplazamientos de los nudos avaluados en dirección de las cargas) y suponiendo los apoyos rígidos se obtiene

$$\Sigma P \delta' = \Sigma S_0 S' r$$

Significado análogo tiene la sumatoria $\Sigma S_0 S'' r$

Para la sollicitación $X' = -1$ y para los desplazamientos producidos por la sollicitación $X'' = -1$, indicando con δ_{12} el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza $X' = -1$ (avaluado en dirección de la fuerza misma) producido por la fuerza $X'' = -1$, el teorema de los trabajos virtuales nos da

$$\delta_{12} = \Sigma S'' S' r$$

que resulta igual a (teorema de Maxwell)

$$\delta_{21} = \Sigma S'' S' r$$

Con interpretación análoga se obtiene

$$\delta_{11} = \Sigma S'^2 r$$

$$\delta_{22} = \Sigma S''^2 r$$

y finalmente, combinando la sollicitación $X' = -1$ con los desplazamientos térmicos se tendrá, indicando con δ_{1t} el desplazamiento térmico del punto de aplicación de la fuerza $X' = -1$ avaluado en dirección de la fuerza misma,

$$\delta_{1t} = \Sigma S' \alpha t s$$

y análogamente

$$\delta_{2t} = \Sigma S'' \alpha t s$$

de manera que las (15) pueden escribirse también

$$(23) \quad \begin{cases} \delta_1 = \Sigma P \delta' - X' \delta_{11} - X'' \delta_{12} + \delta_{1t} \\ \delta_2 = \Sigma P \delta'' - X' \delta_{12} - X'' \delta_{22} + \delta_{2t} \end{cases}$$

25. Se llega al mismo resultado aplicando el teorema de reciprocidad de Maxwell. Así, p. ej., la reacción X del apoyo intermedio C de una viga enrejada continua

de 3 apoyos, producida por una cierta condición de carga real dada (fig. 16) puede determinarse de la manera siguiente:

Suprimido el apoyo C se determina el descenso δ_0 del nudo C de la viga enrejada AB simplemente apoyada en sus extremos; luego, supuestas nulas todas las cargas se determina el descenso δ_r del mismo nudo, producido por una carga unitaria aplicada en C ($X=-1$). Se tendrá entonces, evidentemente, si los apoyos son rígidos

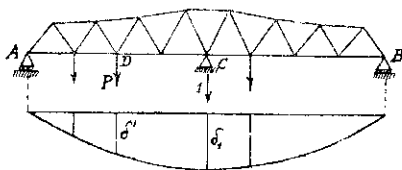


Fig. 16

$$\delta_0 - \frac{X}{1} \delta_r = 0$$

de donde

$$(24) \quad X = 1 \cdot \frac{\delta_0}{\delta_r}$$

y si el apoyo C sufre un descenso Δc respecto a la recta AB, se debería poner

$$\delta_0 - \frac{X}{1} \delta_r = \Delta c$$

de donde

$$X = 1 \cdot \frac{\delta_0 - \Delta c}{\delta_r}$$

Análogamente, indicando con δ_t el desplazamiento vertical del nudo C (positivo hacia abajo) producido por una variación de temperatura en las barras (si la cabeza ABC es rectilínea y la variación de temperatura es uniforme para todas las barras $\delta_t=0$), se tendrá

$$X_t = 1 \cdot \frac{\delta_t}{\delta_r}$$

Imaginemos ahora que se ha construido el *polígono de inflexión* de la cabeza inferior (aquella en que están aplicadas las cargas) de la viga AB sin el apoyo C, producido por una carga unitaria aplicada en C, y entonces si la carga 1 en C hace bajar otro nudo D en la cantidad δ' , la misma carga 1 colocada en D hará bajar C en la misma cantidad δ' , en virtud del teorema de Maxwell. Este polígono de inflexión es por lo tanto, también la *línea de influencia* del descenso del nudo C de la viga AB, sin el apoyo C. o sea una línea tal que su ordenada a plomo de la vertical de una carga unitaria que se mueve sobre la viga AB da el descenso del punto C. Resulta que si la viga AB está cargada efectivamente por un conjunto de cartgas P, el descenso del punto C está dada por la sumatoria $\Sigma P \delta'$; se tiene entonces

$$\delta_0 = \Sigma P \delta'$$

y por lo tanto, la (24) se convierte en

$$(25) \quad X = \frac{\Sigma P \delta'}{\delta_i}$$

26. Análogamente, el ejemplo del arco impostado con rótulas tratado en el N.º 5, puede desarrollarse de esta otra manera. Convertido el arco en estáticamente determinado en la forma ya vista, se construye el diagrama Williot para la sollicitación hipotética 1 sec ϵ correspondiente a $X = -1$. Sea δ_i el desplazamiento horizontal correspondiente de la rótula B, y δ' el desplazamiento de un nudo en el que hay aplicada una fuerza P (avaluado en dirección de la fuerza); entonces, por el teorema de Maxwell, si la fuerza 1 aplicada horizontalmente en B desplaza de δ' el punto de aplicación de P, la misma fuerza unitaria colocada en el lugar de P desplazará a B horizontalmente, hacia afuera, de la misma cantidad δ' , y entonces el conjunto de las fuerzas P dará el desplazamiento $\Sigma P \delta'$ del punto B. La reacción X desplazará en vez el punto B hacia el interior de la cantidad $-X\delta_i$; se tendrá entonces

$$\Delta l = \Sigma P \delta' - X \delta_i$$

de donde

$$X = \frac{\Sigma P \delta' - \Delta l}{\delta_i}$$

Si hay variación de temperatura se calculan las variaciones térmicas de longitud $\Delta s_t = \alpha t s$ para cada barra, se dibuja un nuevo diagrama Williot con el objeto de obtener el desplazamiento horizontal correspondiente δ_t del punto B; se tendrá entonces

$$0 = \delta_t - \frac{X_t}{1} \delta_i$$

de donde

$$(27) \quad X_t = 1 \cdot \frac{\delta_t}{\delta_i}$$

Si la variación de temperatura es uniforme para todas las barras se tiene, evidentemente

$$\delta_t = \alpha t l$$

y entonces

$$X_t = 1 \cdot \frac{\alpha t l}{\delta_i}$$

(Continuará).